

一个包含新的 Smarandache 函数的方程

陈国慧

(海南师范大学 数学与统计学院, 海南海口 571158)

摘 要: 定义一个新的 Smarandache 函数 $\overline{SL}(n)$, 并研究一个包含该函数的方程. 利用初等方法, 给出了一个包含函数 $\overline{SL}(n)$ 的方程的正整数解. 方程只有五个正整数解.

关键词: 新的 Smarandache 函数; 方程; 正整数解

1 引言及结果

对任意正整数 n , 著名的 Smarandache LCM 函数 $SL(n)$ 定义为最小的正整数 m 使得 $n \mid [1, 2, \dots, m]$, 其中 $[1, 2, \dots, m]$ 表示 $1, 2, \dots, m$ 的最小公倍数^[1]. 例如 $SL(n)$ 的前几个值是 $SL(1) = 1, SL(2) = 2, SL(3) = 3, SL(4) = 4, SL(5) = 5, SL(6) = 3, SL(7) = 7, \dots$. 不少学者研究过关于 $SL(n)$ 的初等性质, 并获得了一系列结果, 参阅文献 [2-7]. 现在令 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 n 的标准分解式时, 则由 $SL(n)$ 的性质容易得到

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}\}$$

我们通常将满足条件 $f(n) = \max\{f(p_1^{\alpha_1}), f(p_2^{\alpha_2}), \dots, f(p_k^{\alpha_k})\}$ 的算术函数 $f(n)$ 称为 Smarandache 可乘函数. 因此 $SL(n)$ 是一个 Smarandache 可乘函数. 受文献 [8] 的启发, 本文定义了一个新的 Smarandache 型函数 $\overline{SL}(n)$ 如下: $\overline{SL}(1) = 1$, 当 $n > 1$ 且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 为 n 的标准分解式时定义:

$$\overline{SL}(n) = \min\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}\}$$

研究发现函数 $\overline{SL}(n)$ 与函数 $SL(n)$ 有许多类似的性质, 例如当 n 为素数的方幂时, $\overline{SL}(n) = SL(n)$. 对于 $\overline{SL}(n)$ 函数及欧拉函数 $\varphi(n)$, 经检验我们发现存在无限多个正整数 n 使得 $\sum_{d|n} \overline{SL}(d) > \varphi(n)$. 事实上, 由 (1) 式知, 当 $n = p^\alpha$ 为素数方幂时, 我们有

$$\sum_{d|n} \overline{SL}(d) = \sum_{d|p^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + p + \cdots + p^\alpha > p^\alpha - p^{\alpha-1} = \varphi(n)$$

同时又存在无限多个正整数 n , 使得 $\sum_{d|n} \overline{SL}(d) < \varphi(n)$. 例如当 n 为两个不同奇素数的乘积时, 即 $n = p \cdot q$, 若 $5 \leq p < q$ 为素数, 那么

$$\sum_{d|n} \overline{SL}(d) = \sum_{d|p \cdot q} \overline{SL}(d) = 1 + 2p + q < (p-1) \cdot (q-1) = \varphi(n)$$

收稿日期: 2009-04-19

资助项目: 海南省教育厅高等学校科研资助项目 (Hjkj2008-29); 国家自然科学基金 (10671155)

于是我们自然想到, 对于哪些正整数 n , 会有方程

$$\sum_{d|n} \overline{SL}(d) = \varphi(n) \quad (1)$$

成立, 其中 $\sum_{d|n}$ 表示对 n 的所有正因数求和, $\varphi(n)$ 为欧拉函数.

本文的主要目的就是利用初等方法研究方程 (1) 的可解性, 并获得了该方程的所有正整数解. 具体地说也就是证明了下面的:

定理 方程 $\sum_{d|n} \overline{SL}(d) = \varphi(n)$ 有且仅有五个正整数解 $n = 1, 75, 88, 102, 132$.

2 引理及其证明

为了完成定理的证明. 首先需要两个简单引理.

引理 1 不等式 $\varphi(m) < 4d(m)$ 成立当且仅当 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56, 60, 72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288$. 这里 $d(m)$ 为 Dirichlet 除数函数.

证明 令 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 m 的标准素因数分解式. 我们分以下几种情况进行讨论:

i) 如果分解式中存在因子 2^α 且 $\alpha \geq 6$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i} (1 - \frac{1}{p_i})}{\alpha_i + 1} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i-1} (p_i - 1)}{\alpha_i + 1} \geq \frac{2^{\alpha-1}}{\alpha+1} > 4$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

ii) 如果分解式中存在因子 3^α 且 $\alpha \geq 3$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{3^{\alpha-1} \cdot 2}{\alpha+1} > 4$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

iii) 如果分解式中存在因子 5^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{5^{\alpha-1} \cdot 4}{\alpha+1} > 4$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

iv) 如果分解式中存在因子 7^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{7^{\alpha-1} \cdot 6}{\alpha+1} > 4$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

v) 如果分解式中存在因子 p^α 且 $p \geq 11$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{p^{\alpha-1} \cdot (p-1)}{\alpha+1} > 4$$

即 $\varphi(m) \geq 4d(m)$.

因此我们只需在 $m = 2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma \cdot 7^\delta$ ($0 \leq \alpha \leq 5, 0 \leq \beta \leq 2, \gamma = \delta = 0$ 或 1) 中寻找满足条件 $\varphi(m) < 4d(m)$ 的正整数 m 即可, 经过验证, 得出以下的 35 个满足条件的 m : $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56, 60, 72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288$. 于是完成了引理 1 的证明.

引理 2 当 m 不含有素因子 2 时, 不等式 $\varphi(m) < 6d(m)$ 成立当且仅当 $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 27, 33, 35, 45, 63, 105$.

证明 令 $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 表示 m 的标准素因数分解式, 其中 $p_i \geq 3 (i = 1, 2, \cdots, k)$. 我们分以下几种情况来进行讨论:

i) 如果分解式中存在因子 3^α 且 $\alpha \geq 4$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{3^{\alpha-1} \cdot 2}{\alpha + 1} > 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

ii) 如果分解式中存在因子 5^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{5^{\alpha-1} \cdot 4}{\alpha + 1} > 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

iii) 如果分解式中存在因子 7^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{7^{\alpha-1} \cdot 6}{\alpha + 1} > 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

iv) 如果分解式中存在因子 11^α 且 $\alpha \geq 2$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{11^{\alpha-1} \cdot (p-1)}{\alpha + 1} > 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

v) 如果分解式中存在因子 p^α 且 $p \geq 13$, 则有

$$\frac{\varphi(m)}{d(m)} \geq \frac{p^{\alpha-1} \cdot (p-1)}{\alpha + 1} \geq 6$$

即 $\varphi(m) \geq 6d(m)$.

因此我们只需在 $m = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma \cdot 11^\delta (0 \leq \alpha \leq 3, 0 \leq \beta \leq 1, 0 \leq \gamma \leq 1, 0 \leq \delta \leq 1)$ 中寻找满足条件 $\varphi(m) < 6d(m)$ 的正整数 m 即可, 经过验证, 得出以下 14 个满足条件的 m : $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 27, 33, 35, 45, 63, 105$.

于是完成了引理 2 的证明.

3 定理的证明

现在我们利用这两个引理来给出定理的证明. 容易验证 $n = 1$ 是方程的解. 设 $n > 1$ 且 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是 n 的标准素因数分解式, 因为 $n = p^\alpha$ 不满足方程, 所以当 n 满足方程时有 $k \geq 2$. 现在设

$$SL(n) = \max\{p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \cdots, p_k^{\alpha_k}\} = p^\alpha$$

为方便起见设 $n = mp^\alpha$ 满足方程, 此时应有:

$$\sum_{d|n} \overline{SL}(d) = \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{d|m} \overline{SL}(dp^i) = \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{d|m} \overline{SL}(dp^i) = p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(m)$$

因为当 $d|m$ 时, $\overline{SL}(dp^i) \leq p^i$, 所以

$$p^{\alpha-1}(p-1)\varphi(m) \leq \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + \sum_{i=1}^{\alpha} \sum_{d|m} p^i = \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + d(m) \cdot \sum_{i=1}^{\alpha} p^i$$

$$= \sum_{d|m} \overline{SL}(d) + \frac{p(p^\alpha - 1)}{p - 1} d(m)$$

上式两边同除以 $p^{\alpha-1}(p-1)$, 并注意到当 $d|m$ 时 $\overline{SL}(d) \leq p^i$, 所以有

$$\begin{aligned} \varphi(m) &\leq \sum_{d|m} \frac{\overline{SL}(d)}{p^{\alpha-1}(p-1)} + \frac{p(p^\alpha - 1)}{p^{\alpha-1}(p-1)^2} d(m) \\ &\leq \frac{p}{p-1} \cdot d(m) + \left(\frac{p}{p-1}\right)^2 \cdot d(m) = \frac{p(p-1) + p^2}{(p-1)^2} \cdot d(m) \end{aligned}$$

当 $p > 2$ 时, 上式变为 $\varphi(m) < 4\varphi(m)$, 当 $p = 2$ 时, 上式变为 $\varphi(m) \leq 6d(m)$. 即若 $n = mp^\alpha$ 满足方程, 当 $p > 2$ 时, 应有 $\varphi(m) < 4d(m)$, 也就是当 $\varphi(m) \geq 4d(m)$ 时, $n = mp^\alpha$ 不是方程的解; 或当 $p = 2$ 时, 应有 $\varphi(m) \leq 6d(m)$, 也就是当 $\varphi(m) > 6d(m)$ 时, $n = m \cdot 2^\alpha$ 不是方程的解.

由引理 1 可知, $\varphi(m) < 4d(m)$ 当且仅当 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56, 60, 72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288$. 由引理 2 可知, $p = 2$ 时, $\varphi(m) \leq 6d(m)$ 当且仅当 $m = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 27, 33, 35, 45, 63, 105$. 下面只需讨论在上述列举的 m 中, 那些 $n = mp^\alpha$ 满足方程即可.

1) 当 $m = 1$ 时, $n = p^\alpha$, 这里 p 是任意素数.

$$\sum_{d|p^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha > p^\alpha - p^{\alpha-1} = \varphi(p^\alpha)$$

即 $n = p^\alpha$ 不是方程 (1) 的解.

2) 当 $m = 2$ 时, $n = 2p^\alpha$, 这里 $p \geq 3$.

$$\begin{aligned} \sum_{d|2p^\alpha} \overline{SL}(d) &= \sum_{d|p^\alpha} \overline{SL}(d) + \sum_{d|p^\alpha} \overline{SL}(2d) = \sum_{d|p^\alpha} \overline{SL}(d) + 2(\alpha + 1) \\ &= 1 + p + p^2 + \cdots + p^\alpha + 2(\alpha + 1) \\ \sum_{d|2p^\alpha} \overline{SL}(d) &> \varphi(2p^\alpha) = \varphi(2)\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} \end{aligned}$$

所以 $n = 2p^\alpha (p \geq 3)$ 不是方程 (1) 的解.

3) 当 $m = 3$ 时, $n = 3p^\alpha$, 这里 $p \neq 3$, 若 $p = 2$,

$$\sum_{d|3 \cdot 2^\alpha} \overline{SL}(d) = \sum_{d|2^\alpha} \overline{SL}(d) + \sum_{d|2^\alpha} \overline{SL}(3d) = 2^{\alpha+1} + 3\alpha + 1$$

对 α 用数学归纳法可证 $2^{\alpha+1} + 3\alpha + 1 > 3 \cdot 2^{\alpha-1}$, 即

$$\sum_{d|3 \cdot 2^\alpha} \overline{SL}(d) > \varphi(3 \cdot 2^\alpha)$$

若 $p = 5$, 当 $\alpha = 1$ 时, $n = 15$ 不是方程 (1) 的解; 当 $\alpha = 2$ 时, $n = 75$ 满足方程 (1), 因而是方程 (1) 的解; 当 $\alpha \geq 3$ 用数学归纳法可证

$$\sum_{d|3 \cdot 5^\alpha} \overline{SL}(d) = 1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^\alpha + 3(\alpha + 1) < 2(5^\alpha - 5^{\alpha-1}) = \varphi(3 \cdot 5^\alpha)$$

此时 $n = 3 \cdot 5^\alpha$ 不是方程 (1) 的解.

若 $p \geq 5$ 时, 同上可证 $n = 3 \cdot p^\alpha$ 不是方程 (1) 的解.

4) 当 $m = 4$ 时, $n = 4p^\alpha$, 则 $p \geq 3$, 分 $p = 3, p = 5, p = 7, p = 11, p = 13$ 及 $p > 13$ 六种情况用上面的方法讨论得知 $n = 4p^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.

- 5) 当 $m = 5$ 时, 分 $p = 2, p = 3, p > 5$ 讨论 $n = 5p^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.
- 6) 当 $m = 6$ 时, $n = 6p^\alpha$, 则 $p \geq 5$. 经过验证得知当 $p = 17, \alpha = 1$ 时, $n = 102$ 是方程 (1) 的解, 其它情况都不是方程 (1) 的解.
- 7) 当 $m = 7, 8, 9, 10$ 时, 同上可验证 $n = m \cdot p^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.
- 8) 当 $m = 11$ 时, 由引理 2 知道, $p = 2$, 此时 $n = 11 \cdot 2^\alpha$, 容易验证当 $\alpha = 3$ 时 $n = 88$ 是方程 (1) 的解, 而对 α 的其它取值 n 都不是方程 (1) 的解.
- 9) 当 $m = 12$ 时, 则 $n = 12 \cdot p^\alpha$, 此时 $p \geq 5$. 容易验证当 $p = 11, \alpha = 1$ 时, $n = 132$ 是方程 (1) 的解, 而对 p 及 α 的其它取值 n 都不是方程 (1) 的解.
- 10) 当 $m = 27, 33, 35, 45, 63, 105$ 时, $p = 2$, 可以验证这时的 $n = m \cdot 2^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.
- 11) 当 $m = 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 48, 56, 60, 72, 80, 84, 96, 120, 144, 168, 288$, 同上可以验证这时的 $n = m \cdot p^\alpha$ 都不是方程 (1) 的解.
- 综上所述, 方程 $\sum_{d|n} \overline{SL}(d) = \varphi(n)$ 有且仅有五个正整数解 $n = 1, 75, 88, 102, 132$. 这就完成了定理的证明.

参考文献

- [1] Smarandache F. Only Problems, Not Solutions, Chicago, Xiquan Publishing House, 1993.
- [2] Balacenoiu I and Seleacu V. History of the Smarandache function[J]. Smarandache Notions Journal, 1999, 10: 192-201.
- [3] Murthy A. Some notions on least common multiples[J]. Smarandache Notions Journal, 2001, 12: 307-309.
- [4] Le Maohua, An equation concerning the Smarandache LCM function[J]. Smarandache Notions Journal, 2004, 14: 186-188.
- [5] Tom M Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1976.
- [6] Lv Zhongtian. On the F Smarandache LCM function and its mean value[M]. Scientia Magna, 2007, 3(1): 22-25.
- [7] 潘承洞、潘承彪. 素数定理的初等证明 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1988.
- [8] 陈国慧、张沛. 一个包含新的 F. Smarandache 函数的方程 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(23): 193-197.

The Value Distribution of a New Smarandache Function

CHEN Guo-hui

(College of Mathematics and Statistics, Hainan Normal University, Haikou 571158, China)

Abstract: Aim: To study an equation involving a new Smarandache function $\overline{SL}(n)$.
Methods: Using the elementary methods. Results: Get all its positive integer solutions of this equation. Conclusion: The equation have only five positive integer solutions.

Keywords: A new Smarandache function; equation; positive integer solutions.